INSIEMI E FUNZIONI

RELAZIONI DI EQUIVALENZA E D'ORDINE

- EQUIVALENZA
  - Riflessiva
  - Simmetrica
  - Transitiva
- ORDINE
  - Riflessiva
  - Antisimmetrica
  - Transitiva
  - Totale: se $\forall x,y$ $x \le y$ o $y \le x$ ($\le$ o $<$)
  - Parziale: se non è totale

INSIEME DELLE PARTI

- $\mathscr{P}(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$
  - Se $|A|=n$, $|\mathscr{P}(A)|=2^n$
- f: $A \to \mathscr{P}(A)$ è naturalmente definita, grazie a AC possiamo definire $f:\mathscr{P}(A) \to A$ surgettiva tale che $f(B) \in B$ $\forall B \subseteq A$

LEMMA DI ZORN

- Sia A un insieme non vuoto e $\forall B \subseteq A$ catena $\exists x$ maggiorante per B $\Longrightarrow$ $\exists x$ massimale in A
  - CATENA: $B \subseteq A$ si dice catena se la relazione d'ordine rispetto a B è totale
  - Un elemento x in un insieme ordinato A è massimale se $x \le y \Rightarrow x=y$
  - x è un maggiorante per $B \subseteq A$ se $y \le x$ $\forall y \in B$

Sono equivalenti

ASSIOMA DELLA SCELTA

- Sia A un insieme e I un insieme di indici e prendiamo A_i una famiglia di sottoinsiemi indicizzati di A
  - $\{A_i \mid i \in I\}$ è una partizione se gli A_i sono tutti disgiunti e la loro unione è tutta A
- AC afferma che $\exists B \subseteq A$ tale che $B \cap A_i = x_i$ $\forall i$
  - Una riformulazione è questa: $\forall f:A \to B$ surgettiva esiste $g:B \to A$ iniettiva tale che $f \circ g = id_B$
  - Vale anche il viceversa: se $f:A \to B$ è iniettiva allora $\exists g:B \to A$ surgettiva tale che $g \circ f = id_A$

INSIEMI

- È una collezione di elementi su cui è possibile fare delle operazioni ed è possibile sempre dire se un elemento vi appartiene o no
  - Bisogna fare attenzione ad evitare paradossi
    - Paradosso di Russell
      - Sia $B=\{A \text{ insieme} \mid A \notin A\}$. $B \in B$?
        - Se $B \in B$ allora per definizione $B \notin B$
        - Se $B \notin B$ allora per definizione $B \in B$
      - Quindi $B \in B$ è indecidibile $\Longrightarrow$ B non è un insieme
    - L'insieme di tutti gli insiemi è una classe
      - Per classe si intende una generica collezione di oggetti che possono essere univocamente identificati (per esempio, tramite una proprietà che li accomuni)
      - Tutti gli insiemi sono classi, ma non è vero il contrario
        - Una classe che non sia un insieme si dice classe propria
      - La distinzione tra classe e insieme è necessaria per evitare i paradossi

Via di uscita

- Operazioni
  - Intersezione
  - Unione
    - Hanno la proprietà distributiva
  - Differenza
  - Differenza simmetrica
  - Prodotto cartesiano
  - Complementare
    - Inverte l'intersezione con l'unione

FUNZIONI TRA INSIEMI

- $f: A \to B$ è una mappa che associa ad ogni $x \in A$ un unico $f(x) \in B$
  - Chiamiamo A dominio e B codominio
  - Definiamo
    - $f(A):=\{f(x) \in B \mid x \in A\}:=Im(f)$ l'immagine di f
    - $\Gamma(f)=\{(x,f(x)) \in A \times B \mid x \in A\}$ il grafico di f
      - $\Gamma \subseteq A \times B$ tale che $\forall x \in A$ $\exists! y \in B$ tale che $(x,y) \in \Gamma$ $\Longrightarrow$ $\exists f:A \to B$ tale che $\Gamma=\Gamma(f)$
- Diciamo che f è
  - INIETTIVA
    - se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
  - SURGETTIVA
    - se $f(A)=B$
  - BIGETTIVA
    - se è iniettiva e suriettiva
    - se f è bigettiva allora è invertibile cioè esiste $f^{-1}: B \to A$
  - COMPOSTA
    - $g:A \to B$, $h:B \to C$, $f=g \circ h$: $A \to C$
    - se f è invertibile $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_A$